計算機システムの基礎(第4回配布)

Google Classroom
a6pwm5q

第2章データ表現

（1）数値データ（numeric data)
　　整数(integer), 浮動小数点数(floating point number)等
（2）非数値データ（nonnumeric data）
　　文字コード、論理データ、制御コードなど

担当：　福井大学　大学院工学研究科
　　　　情報・メディア工学専攻
　　　　森　眞一郎　(moris@u-fukui.ac.jp)

2. 基数の変換

2進数と16進数の相互変換

2進数　nビット　で　0～2^{n-1}までの
2^{n}通りの数値を表現可能

2進数3桁　は　8進数1桁　に相当する表現が可能

2進数4桁　は　16進数1桁　に相当する表現が可能

10進	2進	8進	16進
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7

10進	2進	8進	16進
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

3F40h　= 0011_1111_0100_0000b
(0x3F40　= 0b0011_1111_0100_0000)

3				F				4				0			
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0

1011_1110b = BEh
(0b1011_1110 = 0x3BE)

1	0	1	1	1	1	1	0
B				E			

1111_1111b = FFh
(　= 15d*16d +15d = 255d)

1	1	1	1	1	1	1	1
F				F			

3. 負数の表現と加減算

<u>符号付の2進数表現</u>

n bitで表現された2進数の最上位ビット(Most Significant Bit:MSB)
を符号ビットとし、<u>MSBをSとすると　S=0のとき正、S=1のとき負の数</u>をあらわす。

下位 n-1ビットの表現法として、例えば以下の3つが考えられる

<u>符号＋絶対値</u>
　　下位 n-1ビットで、数値の絶対値を表現する

<u>2の補数</u>
　　符号を含めた n bitで2の補数表現とする

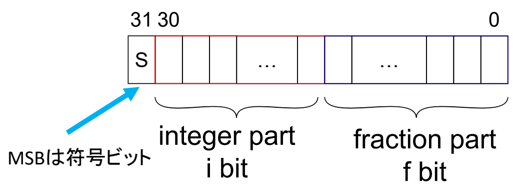
<u>1の補数</u>
　　符号を含めた n bitで1の補数表現とする

実数の表現(2進数で符号＋絶対値表記の例)

- <u>固定小数点表現</u>
  - 整数部(integer part) i桁と小数部(fraction part)f桁
    で実数を表現

10110.1	-1011.01	1.01101
(i=5,f=1)	(i=4,f=2)	(i=1,f=5)

<u>32bit固定小数点表現の例</u>



特に
　i=31,f=0 の場合は　整数
逆に
　i=0, f=31の場合は　純小数

教科書P.44　図4 は整数 or 純小数のみに言及

実数の表現(10進数)

- 固定小数点表現 (小数点の位置は絶対位置)
  - 日常的に接している実数表現
  - 整数部 (integer part) i桁と小数部(fraction part) f桁で表現

    12345.6 (i=5,f=1)　　-9234.56 (i=4,f=2)　　5.23456 (i=1,f=5)

- 浮動小数点表現 (小数点の位置は相対位置)

  1.23456x10^4=12.3456x10^3=123.456x10^2 (=123456.0x10^{-1})
  - 正規化表現 [$(-1)^S \times M \times B^E$形式] (科学記数法[有効桁数が重要])
  - 整数部1桁(0以外の数値)+小数部k桁 (以下はk=5の例)

    1.23456x10^4　　-9.23456x10^3　　5.23456x10^{-0}

この例では有効桁数は10進6桁

3. 負数の表現と加減算

補数(Compliment)

r 進数 n 桁で数を表すとき, r 進数の数 a に対して
$r^n - a$ を a の **r の補数** (基数の補数)
$r^n - a - 1$ を a の **r-1 の補数**(減基数の補数)
と呼ぶ。

10進数2桁 で考えると

13 の **10の補数** は $10^2 - 13 = 87$　　**9の補数**は 86
08 の **10の補数** は $10^2 - 8 = 92$　　**9の補数**は 91
49 の **10の補数** は $10^2 - 49 = 51$　　**9の補数**は 50

10進数3桁 で考えると

913 の **10の補数** は $10^3 - 913 = 087$　　**9の補数**は 086
001 の **10の補数** は $10^3 - 1 = 999$　　**9の補数**は 998
002 の **10の補数** は $10^3 - 2 = 998$　　**9の補数**は 997

3. 負数の表現と加減算

補数(Compliment)

r 進数 n 桁で数を表すとき, r 進数の数 a に対して
$r^n - a$ を a の **r の補数** (基数の補数)
$r^n - a - 1$ を a の **r-1 の補数**(減基数の補数)
と呼ぶ。

10進数2桁 で考えると

13 の **10の補数** は $10^2 - 13 = 87$　　**9の補数**は 86
03 の **10の補数** は $10^2 - 3 = 97$　　**9の補数**は 96
49 の **10の補数** は $10^2 - 49 = 51$　　**9の補数**は 50

$\frac{r^n}{2}$ から $r^n - 1$ までの数字であらわされた数を 負の数と考えると

-50	-49			-3	-2	-1	0	1	2	3	4			48	49
50	51			97	98	99	0	1	2	3	4			48	49

3. 負数の表現と加減算

補数(Compliment)

r 進数 n 桁で数を表すとき, r 進数の数 a に対して
$r^n - a$ を a の **r の補数** (基数の補数)
$r^n - a - 1$ を a の **r-1 の補数**(減基数の補数)
と呼ぶ。

2進数2桁 で考えると

01 の **2の補数** は $2^2 - 1 = 11$　　**1の補数**は 10
10 の **2の補数** は $2^2 - 2 = 10$　　**1の補数**は 01
11 の **2の補数** は $2^2 - 3 = 01$　　**1の補数**は 00

2進数3桁 で考えると

101 の **2の補数** は $2^3 - 5 = 011$　　**1の補数**は 010
001 の **2の補数** は $2^3 - 1 = 111$　　**1の補数**は 110
010 の **2の補数** は $2^3 - 2 = 110$　　**1の補数**は 101

3. 負数の表現と加減算

2進数の補数(Compliment)

r 進数 n 桁で数を表すとき，r 進数の数 a に対して
$r^n - a$ を a の **r の補数** (基数の補数)
$r^n - a - 1$ を a の **r-1 の補数**(減基数の補数)
と呼ぶ。

2進数の場合、
aの1の補数は aの全ての桁の 0 と 1 を入れ替えたものに等しい
aの2の補数は aの1の補数に1加えたものに等しい
この考え方の方が簡単に2の補数が求められる！！

[覚え方] ビット反転して +1

2進数3桁 で考えると
101 の **1の補数**は 010 **2の補数** は 010 + 1 = 011
001 の **1の補数**は 110 **2の補数** は 110 + 1 = 111
010 の **1の補数**は 101 **2の補数** は 101 +1 = 110

2の補数表現

注意：$\bar{6}$ や $\overline{0110}$ は表現が適切でないので使用禁止

- nビットの2進数Xに対して

$$X = [x_{n-1}, \ldots, x_i, \ldots, x_1, x_0]$$
$$\overline{X} = [\overline{x_{n-1}}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots, \overline{x_1}, \overline{x_0}]$$

とおくと、

$$X + \overline{X} = [1,1,1,\ldots,1,1] = (2^n - 1)$$
$$X + (\overline{X} + 1) = 2^n$$

4bitの例
X＝0101(= $5_{(10)}$)
−X=1010+1=1011

X＋(−X)
＝ 0101 + 1011
= 0000 (mod 2^4)

となる。この時nビット(mod 2^n)で物事を考えると

$$X + (\overline{X} + 1) = 2^n (\mathrm{mod}\, 2^n) = 0$$

$$(\overline{X} + 1) = -X$$

…(−X)はXの各ビットを反転したものに1を加えれば求められる

(最上位桁 x_{n-1} が “0” の時は正の数, “1”の時は負の数と考える)

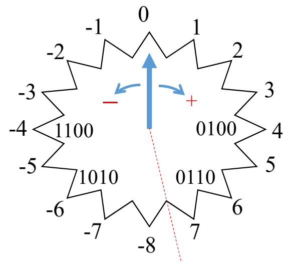
正確には、上で定義した$\bar{X}$は2進数n桁表現におけるXの1の補数表現といいます。

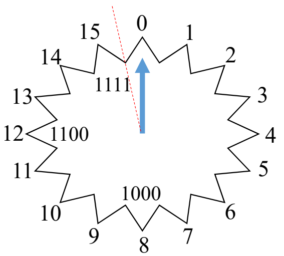
符号付きの2進数表現

4bitの例

10進数	2の補数
--	--
+7	0111
+6	0110
+5	0101
+4	0100
+3	0011
+2	0010
+1	0001
0	0000

10進数	2の補数
-8	1000
-7	1001
-6	1010
-5	1011
-4	1100
-3	1101
-2	1110
-1	1111
--	--





3. 負数の表現と加減算

補数(Compliment)と引き算の関係

r 進数 n 桁で数を表すとき，r 進数の数 a に対して
$r^n - a$ を a の **r の補数** (基数の補数)
$r^n - a - 1$ を a の **r-1 の補数**(減基数の補数)
と呼ぶ。

いま、a の r の補数を a' とすると、 b から a を引くという作業は

$b - a = b + (r^n - a) - r^n$ = b + a' − r^n (= **b + a'** mod 2^n)

となり、b に aのrの補数を加える 計算を行ない、桁あふれを無視する動作と等価
計算結果が $\frac{r^n}{2}$ から $r^n - 1$ までの数字の場合、計算結果はrの補数として表現された負の数と考えればよい。

[r=2のときの別説明]

Yの1の補数

$$X - Y = X + (-Y) = X + (\overline{Y} + 1) \quad (\mathrm{mod}\, 2^N)$$

3. 負数の表現と加減算

補数(Compliment)と引き算の関係

いま、a の r の補数を a′ とすると、 b から a を引くという作業は

$b-a=b+(r^n-a)-r^n$ = b + a′ −r^n (= **b + a′** mod 2^n)

となり、b に aのrの補数を加える 計算を行ない、桁あふれを無視する動作と等価

計算結果が$\frac{r^n}{2}$ から r^n-1 までの数字の場合、計算結果はrの補数として表現された負の数と考えればよい。

10進数表現での減算の例

(注:10の補数表現を用いて
2桁で表現できる数の範囲は−50 〜 49 まで)

30 – 24 ⇒ 30 + 76 = 106 ⇒ 6

22 – 24 ⇒ 22 + 76 = 98 ⇒ -2

99 – 24 ⇒ 99 + 76 = 175 ⇒ 75 ⇒ −25

50 – 24 ⇒ 50 + 76 = 126 ⇒ 26 [本来は -74]
(オーバーフロー発生)

2進数での例

(注:2の補数表現を用いて
4桁で表現できる数の範囲は−8 〜 7 まで)

0110 − 0011 ⇒ 0110 + 1101 = 10011 ⇒ 0011 (3)

0010 − 0011 ⇒ 0010 + 1101 = 1111 (-1)

1000− 0011 ⇒ 1000 + 1101 = 10101 ⇒ 0101 [本来は-11]
(オーバーフロー発生)

[レポート課題] (2の補数表現を用いた負数の表現と計算)

(1) 2進数4桁表記で2の補数表現で表された、以下の数値を10進数に変換せよ。

(a) 1001 (b) 1111 (c) 0111 (d) 1000

(2) 次の符号付10進数を2の補数表現を用いて2進数4桁で表現せよ。

(a) 6 (b) -2 (c) -6

(3) 2進数の減算は2の補数表現を用いることで「ビット反転」と「加算」のみで計算が可能である。この性質をもちいて、10進数で表現された数式を、2進数4桁の2の補数表現に変換したのち, 加算のみで計算せよ。 求まった結果(2の補数表現であることに注意)を10進数に変換せよ。

(a) 3+2 (b) -7+4 (c) (-2) – 4 (d) 5 + 4

(A4 レポート用紙使用のこと。表紙をつける必要はないが、1枚目の上側余白に学生番号、氏名を記入のこと)
PDF に変換して ClassRoomの課題として前日までにファイルを提出。 来週は提出した物の原本と赤ペンを持ってきてください。

3. 浮動小数点数

- 浮動小数点表現の基本概念
  - 正規化表現 [$(-1)^S \times M \times 2^E$形式]
    (科学記数法[有効桁数が重要])
  - 整数部1桁(0以外の数値)+小数部k桁 (以下はk=5の例)
    $1.00111\mathrm{x}2^4$ $-1.10100\mathrm{x}2^3$ $1.01011\mathrm{x}2^{-120}$

32bit浮動小数点表現の例