計算機システムの基礎(第6回配布)

第3章　論理回路

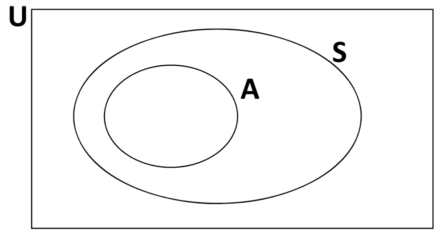
（1）集合
　　集合、補集合、集合の要素、集合の基本演算
（2）2値論理　と　基本論理回路
　　ブール代数、公理、定理、基本論理回路
（3）組み合わせ回路
（4）順序回路

担当：　福井大学　大学院工学研究科
情報･メディア工学専攻
森　眞一郎　(moris@u-fukui.ac.jp)

1．集合

1．1　集合と要素

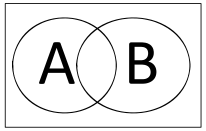
・ある共通の性質をもった『**要素**』(element)（あるいは 「元」）の集まりを**集合(set)**とよぶ。
・x が集合　A　の要素であるとき　$\boldsymbol{x \in A}$　と表す。
・集合A　の要素と　集合B　の要素が　完全に一致する場合　「**集合AとBは等しい**」。
・集合AとSは等しくないが、集合A　の全ての要素が　集合S　の要素と一致する場合
「**集合AはSの部分集合(subset)**」。
・考えている要素全てを含む集合Uは「**全体集合(universal set)**」



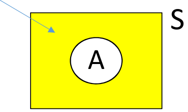
例えば
U：自然数
S：2以上の偶数
A：4以上の4の倍数
B：4以上で4で割り切れる自然数

1．集合

1．2　集合の基本演算



・積集合（product set）（　“共通部分”、“交わり”）
　$A \cap B = \{x|\ x \in A$　かつ　$x \in B\}$　　　∩　：　“Cap”
・和集合（sum set）　<<<<　教科書の間違いを訂正してください！！
　$A \cup B = \{x|\ x \in A$　または　$x \in B\}$　　　∪　：　“Cup”
・補集合(complementary set)
　全体集合Sの部分集合Aが与えられたとき、「**AのSに対する補集合**」は
　SからAの全ての要素をとりのぞいた集合であり　$\overline{A}$　と表現する。
　（　$\overline{A} = S - A$ と書くこともある）
・空集合　φ　(empty set)
　要素数がゼロの集合
　$A \cap \overline{A} = \phi$，$A \cup \overline{A} = S$



ド･モルガンの法則　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$　，　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2値論理と基本論理回路

- 2値論理(binary logic),ブール代数(Boolean algebra)
  - 真(true),偽(false)　あるいは1,0 の2状態で物事を考える論理体系
- 論理関数(logical function)
  - 変数：2値の論理変数(logical variable)または ブール変数（Boolean variable)
  - 演算子：論理演算子
    - 基本演算：論理積、論理和、否定
  - Ex.　f(A,B) = A + B　あるいは簡略形で f = A + B　など

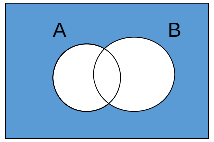
ブール関数 (Boolean function),　論理式(logical equation),　ブール代数(Boolean equation)などとも呼ぶ

論理関数の表現方法

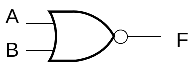
- 論理式
  F＝A＋B･C＋D･E
- 真理値表
- 図(ベン図、カルノー図等)を用いた表現
- 回路図表現（MIL記号、論理素子記号）

真理値表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



ベン図



MIL記号

重要な公理、定理

すべての変数は
1または0の何れかの値をとる

x+1=1　　*x+0=x*
x･1=x　　*x･0=0*
$\overline{0}=1$　　$\overline{1}=0$

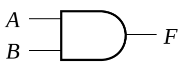
- 対合律(2重否定)
  $\overline{\overline{x}} = x$
- 補元律
  $x \cdot \bar{x} = 0$
  $x + \bar{x} = 1$
- べき等律
  $x \cdot x = x$
  $x + x = x$
- 交換律
  $x \cdot y = y \cdot x$
  $x + y = y + x$
- 結合律
  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 分配律
  $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$
  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- 吸収律
  $x \cdot (x + y) = x$
  $x + x \cdot y = x$
- ド･モルガンの定理
  $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
  $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

基本論理演算

- 論理積(AND)
  F =A･B
  =A∧B
  =A∩B

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

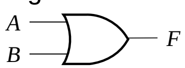
logical product



- 論理和(OR)
  F =A＋B
  =A∨B
  =A∪B

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

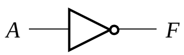
logical sum



- 否定(NOT)
  F =$\overline{A}$
  =～A
  =A'
  =¬A
  = ! A

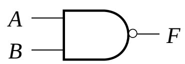
A	F
0	1
1	0

complement



論理素子とそのシンボル

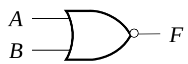
Not AND
(NAND)



$F = \overline{A \bullet B}$

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

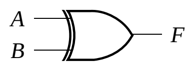
Not OR
(NOR)



$F = \overline{A + B}$

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

排他的論理和
(XOR)



F =A⊕B

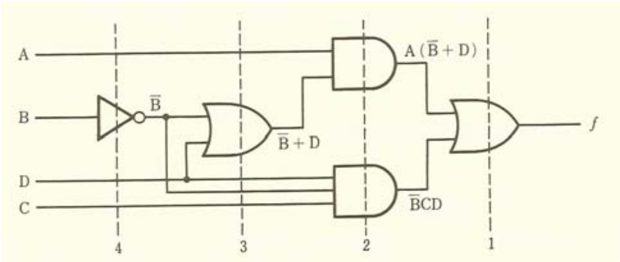
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

組み合わせ論理回路の解析(1)

一般系

与えられた論理回路の入力から出力へ向かって、
各ゲートごとにその出力を順次書いていく

ごく自然な解析法！！

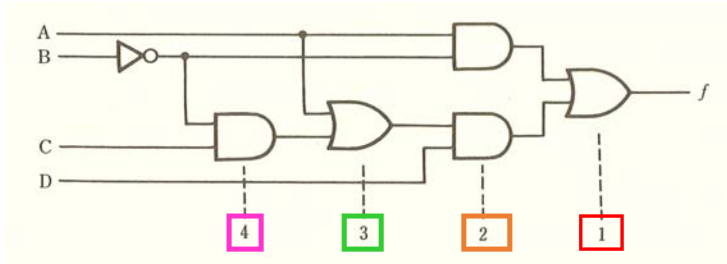


組み合わせ論理回路の合成

多段論理式の場合

今日は地道に変換する方法

$$F = A\overline{B} + D(A + \overline{B}C)$$

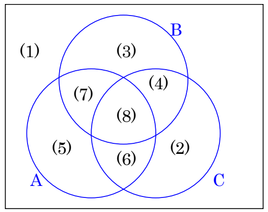


最小項と最大項（１）

[用語の定義]最小項と最大項
- 最小項：
  - 全ての変数が真または偽の形で含まれている論理積項
- 最大項：
  - 全ての変数が真または偽の形で含まれている論理和項

例　3変数の場合

A	B	C	Y
0	0	0	(1)
0	0	1	(2)
0	1	0	(3)
0	1	1	(4)
1	0	0	(5)
1	0	1	(6)
1	1	0	(7)
1	1	1	(8)



ベン図

最小項はベン図上での8つの区画のうち
いずれか一つの区画に対応

⇕

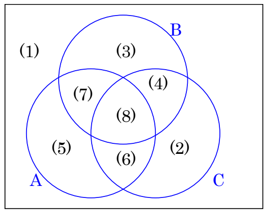
最大項はベン図上での8つの区画のうち
いずれか一つの区画を除いた区画に対応

最小項と最大項（２）

[用語の定義]最小項と最大項
- 最小項：
  - 全ての変数が真または偽の形で含まれている論理積項
- 最大項：
  - 全ての変数が真または偽の形で含まれている論理和項

例　3変数の場合

A	B	C	Y
0	0	0	(1)
0	0	1	(2)
0	1	0	(3)
0	1	1	(4)
1	0	0	(5)
1	0	1	(6)
1	1	0	(7)
1	1	1	(8)



ベン図

最小項はベン図上での8つの区画のうち
いずれか一つの区画に対応

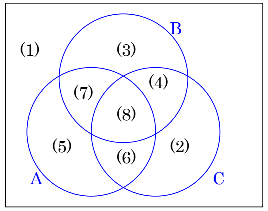
A･(～B)･C ⇕

最大項はベン図上での8つの区画のうち
いずれか一つの区画を除いた区画に対応

(～A)＋B＋(～C)

....抜いた区画はA･(～B)･C

最小項と最大項（3）



ベン図

最小項はベン図上での8つの区画のうち
いずれか一つの区画に対応

$A \bullet \overline{B} \bullet C$

最大項はベン図上での8つの区画のうち
いずれか一つの区画を除いた区画に対応

$\overline{A} + B + \overline{C}$

….除いた区画は $A \bullet \overline{B} \bullet C$

対応関係は「ド・モルガンの定理」を使えば一意にわかる！！

$$\overline{X \bullet Y \bullet Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$\overline{X + Y + Z} = \overline{X} \bullet \overline{Y} \bullet \overline{Z}$$

標準形（1）

[用語の定義]積和形と和積形

- 積和形(sum of products form)：
  - 論理関数が論理積項の和として論理式表現された場合、その論理式は積和形表現であると呼ぶ。
  - 特に、全ての論理積項が最小項で表現されている場合は、
    標準積和形 （あるいは加法標準形）と呼ぶ。
- 和積形(product of sums form)：
  - 論理関数が論理和項の積として論理式表現された場合、その論理式は和積形表現であると呼ぶ。
  - 特に、全ての論理和項が最大項で表現されている場合は、
    標準和積形 （あるいは乗法標準形）と呼ぶ。

標準形（2）

[用語の定義]積和形と和積形

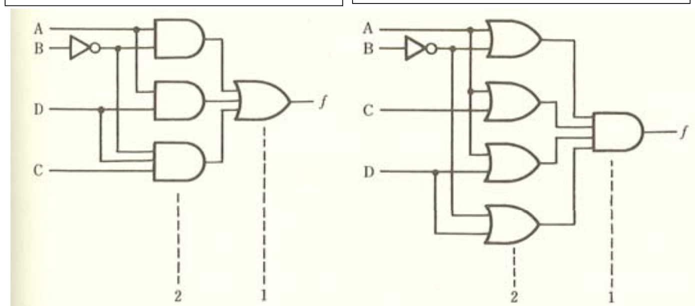
- 積和形(sum of products form)：
  - 積和形表現
    f（A、B、C）= A・B + B・C + A・C　　　… 積 の 和
  - 標準積和形表現（あるいは加法標準形表現）
    f（A、B、C）= A・B・C＋A・B・(〜C)＋A・(〜B)・C＋(〜A)・B・C
    … 最小項 の 和
- 和積形(product of sums form)：
  - 和積形表現
    g(A,B,C) = (~A + ~B)(~B + ~C)(~A + ~C)　… 和 の 積
  - 標準和積形 （あるいは乗法標準形）
    g(A,B,C) = (~A + ~B + ~C)(~A + ~B + C)(~A + B + ~C)(A + ~B + ~C)
    … 最大項の積

組み合わせ論理回路の合成

積和型あるいは和積型論理式の場合(2段)

積和型の場合
AND-OR型ゲート構成　で合成

和積型の場合
OR-AND型ゲート構成　で合成



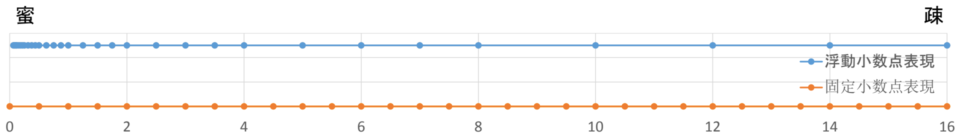
(a) 積和形
$f = A\overline{B} + AD + \overline{B}CD$

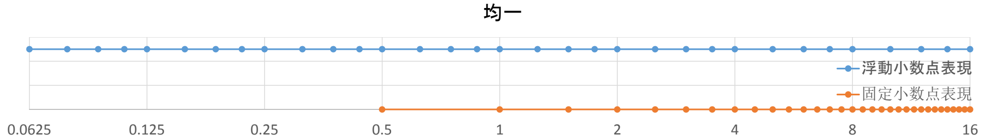
(b) 和積形
$f = (A+\overline{B})(A+C)(A+D)(\overline{B}+D)$

図 4.16　2段構成のゲート回路の例

『補足資料』　同一ビット数の　浮動小数点表現と固定小数点表現で
表現できる数値の関係（一例）　[2進数表現Version]

（教科書　P.053の図2は「雰囲気」はわかりますが厳密には不正確です）





（固定小数点表現では　0　も表現できるが、横軸対数メモリのグラフでは表現できないので省略してあります）

これらは5bit の例ですが、厳密には右端の16（33個目)は表現できませんが見やすくするために追加しています

[レポート課題] (論理式と論理回路）

(1) 以下の論理式を証明せよ

(a) $A \bullet C + \overline{A} \bullet B = (A + B) \bullet (\overline{A} + C)$

(b) $\overline{A \bullet \overline{\overline{B \bullet C}}} + B \bullet C = \overline{A} + B$

(2) 上記(a)の左辺の論理式に対応する論理回路、ならびに
右辺の論理式に対応する論理回路を設計して図示せよ。

(3) 教科書P.117　問題7の (1)~(3)の論理式に対応する論理回路を設計せよ。

(A4　レポート用紙提出のこと。表紙をつける必要はないが、1枚目の上側余白に学生番号、氏名を記入のこと
両面を使って解答してよいが、複数ページに跨る場合は必ず　ホッチキス留め　すること。）