計算機システムの基礎（第4回配布）

第2章データ表現

（1）数値データ（numeric data）
　　整数(integer), 浮動小数点数(floating point number)等
（2）非数値データ（nonnumeric data）
　　文字コード、論理データ、制御コードなど

担当: 福井大学　大学院工学研究科
情報・メディア工学専攻
森　眞一郎　(moris@u-fukui.ac.jp)

2. 基数の変換

2進数と10進数の相互変換

便利な表？

0. 5	2
0. 25	4
0. 125	8
0. 0625	16
0. 03125	32
	64
	128
	256
	512
	1024

10進数⇒2進数

1）基本形　（整数部　と　小数部を別々に計算）

例えば　26. 875d　を　2進数に変換

整数部
26/2 = 13 ... 0
13/2 = 6 ... 1
6/2 = 3 ... 0
3/2 = 1 ... 1
1/2 = 0 ... 1 （最上位桁）

小数部
0.625 *2 = 1.25
0.25 *2 = 0.50
0.50 * 2 = 1.00 （最下位桁）

検算！
11010b = 16+8+2 = 26 (正解！)　　0.101b = 0.5 + 0.125 = 0.625 (正解！)

2） 引き算の利用（整数部　と　小数部を別々に計算）

27 ー 16 = 11 (16d=10000b)
11 ー 8 = 3 (8d= 1000b)
3 ー 2 = 1 (2d= 10b)
1 ー 1 = 0 (1d= 1b)

0.875 ー0.5 = 0.375 (0.5d = 0.1b)
0.375 ー0.25 = 0.125 (0.25d = 0.01b)
0.125 ー0.125 = 0 (0.125d = 0.001b)

2. 基数の変換

2進数と10進数の相互変換

2進数表現での少数表現の限界　…　有限桁の2進数で表現できない数値が存在！

0.725 *2 = 1.45
0.45 *2 = 0.9
0.9 *2 = 1.8
0.8 *2 = 1.6
0.6 *2 = 1.2
0.2 *2 = 0.4
0.4 *2 = 0.8

0.8 *2 = 1.6
0.6 *2 = 1.2
0.2 *2 = 0.4
0.4 *2 = 0.8

$$0.725d = 0.101\dot{1}10\dot{0}$$

循環小数表現となり、有限桁で表すことが不可能

有限ビットで表現すると、 真の値　との差が　「打ち切り誤差」となる

少数点以下　mビットで打ち切った場合の　打ち切り誤差 の絶対値は　2^{-m}　未満

（例えば少数点以下2ビットで打ち切ると、表現可能な小数部は
0.00　0.25　0.50　0.75　の4種類で　誤差の絶対値は　0.25　未満）

2. 基数の変換

2進数と16進数の相互変換

2進数　nビット　で　0～2^{n-1}までの
2^n通りの数値を表現可能

2進数3桁　は　8進数1桁　に相当する表現が可能

2進数4桁　は　16進数1桁　に相当する表現が可能

10進	2進	8進	16進
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7

10進	2進	8進	16進
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

3F40h = 0011_1111_0100_0000b
(0x3F40 = 0b0011_1111_0100_0000)

3				F				4				0			
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0

1011_1110b = BEh
(0b1011_1110 = 0x3BE)

1	0	1	1	1	1	1	0
B				E			

1111_1111b = FFh
(= 15d*16d +15d = 255d)

1	1	1	1	1	1	1	1
F				F			

3. 負数の表現と加減算

符号付の2進数表現

n bitで表現された2進数の最上位ビット(Most Significant Bit:MSB)
を符号ビットとし、MSBをSとすると　S=0のとき正、S=1のとき負の数をあらわす。

下位 n-1ビットの表現法として、例えば以下の3つが考えられる

符号＋絶対値

下位 n-1ビットで、数値の絶対値を表現する

2の補数

符号を含めた n bitで2の補数表現とする

1の補数

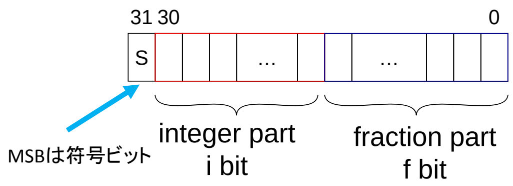
符号を含めた n bitで1の補数表現とする

実数の表現（2進数で符号＋絶対値表記の例）

- 固定小数点表現
  - 整数部(integer part) i桁と小数部(fraction part)j桁
    で実数を表現

10110.1　　-1011.01　　1.01101
(i=5,f=1)　　(i=4,f=2)　　(i=1,f=5)

32bit固定小数点表現の例



特に
　i=31,f=0 の場合は　整数
逆に
　i=0, f=31の場合は　純小数

教科書P.44　図4 は整数 or 純小数のみに言及

実数の表現（10進数）

- 固定小数点表現（小数点の位置は絶対位置）
  - 日常的に接している実数表現
  - 整数部 (integer part) i桁と小数部(fraction part) f桁で表現

12345.6　　-9234.56　　5.23456
(i=5,f=1)　　(i=4,f=2)　　(i=1,f=5)

- 浮動小数点表現（小数点の位置は相対位置）
  $1.23456 \times 10^4 = 12.3456 \times 10^3 = 123.456 \times 10^2$ $(=123456.0 \times 10^{-1})$
  - 正規化表現　[$(-1)^S \times M \times B^E$形式] (科学記数法[有効桁数が重要])
  - 整数部1桁（0以外の数値）＋小数部k桁　（以下はk=5の例）

1.23456×10^4　　-9.23456×10^3　　5.23456×10^{-0}

この例では有効桁数は10進6桁

3. 負数の表現と加減算

補数（Compliment）

r　進数　n 桁で数を表すとき，r　進数の数 a に対して
　$r^n - a$　　を　a の　**r　の補数**　（基数の補数）
　$r^n - a - 1$　を　a の　**r-1 の補数**（減基数の補数）
と呼ぶ。

10進数2桁　で考えると

13　の　**10の補数**　は　$10^2 - 13 = 87$　　**9の補数**は　86
08　の　**10の補数**　は　$10^2 - 8 = 92$　　**9の補数**は　91
49　の　**10の補数**　は　$10^2 - 49 = 51$　　**9の補数**は　50

10進数3桁　で考えると

913　の　**10の補数**　は　$10^3 - 913 = 087$　　**9の補数**は　086
001　の　**10の補数**　は　$10^3 - 1 = 999$　　**9の補数**は　998
002　の　**10の補数**　は　$10^3 - 2 = 998$　　**9の補数**は　997

3. 負数の表現と加減算

補数（Compliment）

r　進数　n 桁で数を表すとき，r　進数の数 a に対して
　　$r^n - a$　　　を　a の **r　の補数**（基数の補数）
　　$r^n - a - 1$　を　a の **r-1 の補数**（減基数の補数）
と呼ぶ。

10進数2桁　で考えると

13	の **10の補数**	は $10^2 - 13 = 87$	**9の補数は**	86
03	の **10の補数**	は $10^2 - 3 = 97$	**9の補数は**	96
49	の **10の補数**	は $10^2 - 49 = 51$	**9の補数は**	50

$\frac{r^n}{2}$ から $r^n - 1$ までの数字であらわされた数を　負の数と考えると

-50	-49			-3	-2	-1	0	1	2	3	4			48	49
50	51			97	98	99	0	1	2	3	4			48	49

3. 負数の表現と加減算

補数（Compliment）

r　進数　n 桁で数を表すとき，r　進数の数 a に対して
　　$r^n - a$　　　を　a の **r　の補数**（基数の補数）
　　$r^n - a - 1$　を　a の **r-1 の補数**（減基数の補数）
と呼ぶ。

2進数2桁　で考えると

01	の **2の補数**	は $2^2 - 1 = 11$	**1の補数は**	10
10	の **2の補数**	は $2^2 - 2 = 10$	**1の補数は**	01
11	の **2の補数**	は $2^2 - 3 = 01$	**1の補数は**	00

2進数3桁　で考えると

101	の **2の補数**	は $2^3 - 5 = 011$	**1の補数は**	010
001	の **2の補数**	は $2^3 - 1 = 111$	**1の補数は**	110
010	の **2の補数**	は $2^3 - 2 = 110$	**1の補数は**	101

3. 負数の表現と加減算

2進数の補数（Compliment）

r　進数　n 桁で数を表すとき，r　進数の数 a に対して
　　$r^n - a$　　　を　a の **r　の補数**（基数の補数）
　　$r^n - a - 1$　を　a の **r-1 の補数**（減基数の補数）
と呼ぶ。

2進数の場合、
　aの1の補数は　aの全ての桁の 0 と 1 を入れ替えたものに等しい
　aの2の補数は　aの1の補数に1加えたものに等しい
この考え方の方が簡単に2の補数が求められる！！

[覚え方] ビット反転して　＋1

2進数3桁　で考えると

101	の **1の補数は** 010	**2の補数**	は	$010 + 1 = 011$
001	の **1の補数は** 110	**2の補数**	は	$110 + 1 = 111$
010	の **1の補数は** 101	**2の補数**	は	$101 + 1 = 110$

２の補数表現

注意：$\overline{6}$ や $\overline{0110}$ は表現が適切でないので使用禁止

- nビットの2進数Xに対して

$$X = [x_{n-1}, \ldots, x_i, \ldots, x_1, x_0]$$
$$\overline{X} = [\overline{x_{n-1}}, \ldots, \overline{x_i}, \ldots, \overline{x_1}, \overline{x_0}]$$

とおくと、

$$X + \overline{X} = [1,1,1,\ldots,1,1] = (2^n - 1)$$
$$X + (\overline{X} + 1) = 2^n$$

4bitの例
　X＝0101(= $5_{(10)}$)
　－X=1010+1=1011
　X＋（－X）
　　＝　0101 + 1011
　　=　0000 (mod 2^4)

となる。この時nビット（mod 2^n）で物事を考えると

$$X + (\overline{X} + 1) = 2^n (\bmod 2^n) = 0$$

$$(\overline{X} + 1) = -X$$

…（－X）はXの各ビットを反転したものに1を加えれば求められる

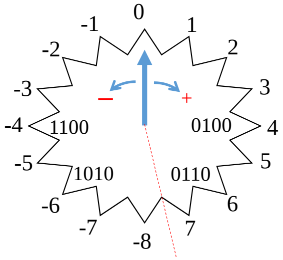
(最上位桁 x_{n-1} が “0” の時は正の数, “1”の時は負の数と考える)

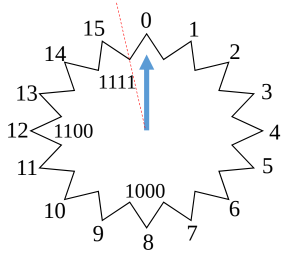
正確には、上で定義した$\overline{X}$は2進数n桁表現におけるXの１の補数表現といいます。

符号付きの2進数表現

4bitの例

10進数	2の補数	10進数	2の補数
--	--	-8	1000
+7	0111	-7	1001
+6	0110	-6	1010
+5	0101	-5	1011
+4	0100	-4	1100
+3	0011	-3	1101
+2	0010	-2	1110
+1	0001	-1	1111
0	0000	--	--





3. 負数の表現と加減算

補数（Compliment）と引き算の関係

r 進数 n 桁で数を表すとき，r 進数の数 a に対して

$r^n - a$ を a の **r の補数**（基数の補数）

$r^n - a - 1$ を a の **r-1 の補数**（減基数の補数）

と呼ぶ。

いま、a の r の補数を a' とすると、b から a を引くという作業は

$b - a = b + (r^n - a) - r^n$ = b + a' − r^n (= **b + a'** mod 2^n)

となり、b に aのrの補数を加える 計算を行ない、桁あふれを無視する動作と等価

計算結果が $\frac{r^n}{2}$ から $r^n - 1$ までの数字の場合、計算結果はrの補数として表現された負の数と考えればよい。

[r=2のときの別説明]

Yの1の補数

$$X - Y = X + (-Y) = X + (\overline{Y} + 1) \quad (\mathrm{mod}\ 2^N)$$

3. 負数の表現と加減算

補数（Compliment）と引き算の関係

いま、a の r の補数を a' とすると、b から a を引くという作業は

$b - a = b + (r^n - a) - r^n$ = b + a' − r^n (= **b + a'** mod 2^n)

となり、b に aのrの補数を加える 計算を行ない、桁あふれを無視する動作と等価

計算結果が $\frac{r^n}{2}$ から $r^n - 1$ までの数字の場合、計算結果はrの補数として表現された負の数と考えればよい。

10進数表現での減算の例

(注：10の補数表現を用いて
2桁で表現できる数の範囲は－50 ～ 49 まで)

30 – 24 ⇒ 30 + 76 = 106 ⇒ 6

22 – 24 ⇒ 22 + 76 = 98 ⇒ -2

99 – 24 ⇒ 99 + 76 = 175 ⇒ 75 ⇒ －25

50 – 24 ⇒ 50 + 76 = 126 ⇒ 26 [本来は -74]
（オーバーフロー発生）

2進数での例

(注：2の補数表現を用いて
4桁で表現できる数の範囲は－8 ～ 7 まで)

0110 － 0011 ⇒ 0110 + 1101 = 10011 ⇒ 0011 (3)

0010 － 0011 ⇒ 0010 + 1101 = 1111 (-1)

1000－ 0011 ⇒ 1000 + 1101 = 10101 ⇒ 0101 [本来は-11]
（オーバーフロー発生）

[レポート課題] (2の補数表現を用いた負数の表現と計算)

(1) 2進数4桁表記で2の補数表現で表された、以下の数値を10進数に変換せよ。

(a) 1001 (b) 1111 (c) 0111 (d) 1000

(2) 次の符号付10進数を2の補数表現を用いて2進数4桁で表現せよ。

(a) 6 (b) -2 (c) -6

(3) 2進数の減算は2の補数表現を用いることで「ビット反転」と「加算」のみで計算が可能である。この性質をもちいて、10進数で表現された数式を、2進数4桁の2の補数表現に変換したのち，加算のみで計算せよ。 求まった結果（2の補数表現であることに注意）を10進数に変換せよ。

(a) 3+2 (b) -7+4 (c) (-2) – 4 (d) 5 + 4

(A4 レポート用紙提出のこと。表紙をつける必要はないが、1枚目の上側余白に学生番号、氏名を記入のこと)
来週は赤ペンを持ってきてください。

3. 浮動小数点数

- 浮動小数点表現の基本概念
  - 正規化表現 [$(-1)^S \times M \times 2^E$形式]
    (科学記数法[有効桁数が重要])
  - 整数部1桁（0以外の数値）＋小数部k桁 （以下はk=5の例）
    $1.00111\text{x}2^{4}$　$-1.10100\text{x}2^{3}$　$1.01011\text{x}2^{-120}$

32bit浮動小数点表現の例