コンピュータ基礎 (第3回配布)

第2章データ表現

(1)数値データ(numeric data)
整数(integer), 浮動小数点数(floating point number)等
(2)非数値データ(nonnumeric data)
文字コード、論理データ、制御コードなど

担当: 福井大学 大学院工学研究科
情報・メディア工学専攻
森 眞一郎 (moris@u-fukui.ac.jp)

[高校情報 復習]データの標記法

- 2進数表現、8進数表現、16進数表現

[一般形] r進n桁表示

$$(a_{n-1}a_{n-2}..a_2a_1a_0)_{(r)} = a_{n-1}\bullet r^{n-1} + a_{n-2} * r^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + a_2\bullet r^2 + a_1\bullet r^1 + a_0\bullet r^0$$

2進数表現
ai のとり得る値は 0か1
8進数表現
2進数表現したものを3桁づつまとめて表現したもの。
aiの取り得る値は 0から7
16進数表現
2進数表現したものを4桁づつまとめて表現したもの。
aiの取り得る値は 0から15
(便宜上、10~15をA~Fの1文字に対応付けて表現)
10進数表現
aiの取り得る値は0から9

[高校復習]2進数、8進数、16進数、10進数

10進	2進	8進	16進
0	00000	0	0
1	00001	1	1
…	…	…	…
7	00111	7	7
8	01000	10	8
9	01001	11	9
10	01010	12	A
11	01011	13	B
12	01100	14	C
13	01101	15	D
14	01110	16	E
15	01111	17	F
16	10000	20	10

1. 数の表現

位取り記数法

「桁」は figure あるいは digit と表現することがある

r進数(基数 r)で 整数部 n桁 小数部 m桁の数が表す
(10進数で換算した時の)値Nは

$$N = (a_{n-1}a_{n-2}\cdot\cdot\cdot a_2a_1a_0 \ . \ a_{-1}a_{-2}\cdot\cdot\cdot a_{-m})_{(r)}$$
$$= a_{n-1}\bullet r^{n-1} + a_{n-2} * r^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + a_2\bullet r^2 + a_1\bullet r^1 + a_0\bullet r^0 + a_{-1}\bullet r^{-1} + \cdot\cdot\cdot + a_{-m}\bullet r^{-m}$$

ここで
r: 基数(radix) あるいは 底(base)　a_i: ディジット(digit)　$0 \le a_i < r$の整数

$(110)_{10}=$
$(110)_8=$
$(110)_2=$

$(0.1)_{10}=$
$(0.1)_8=$
$(0.1)_2=$

1. 数の表現

r 進数

「桁」は figure あるいは digit と
表現することがある

r進数（基数 r）でn桁の計算に関する用語

「桁上げ(Carry:キャリー)」 ある桁の数値が r-1 のとき 1を足すと上位桁に桁上げが発生する。
（より一般的には ある桁で加算した結果 r 以上となると上位桁に桁上げが発生）

「(桁)借り(Borrow:ボロー)」 $(10)_r$から1を引くと上位桁からの（桁）借りが発生する。
（より一般的には ある桁で減算した結果、負となる場合にrを加算して正にし、上位桁を1減算する）

「オーバーフロー」 計算の結果 n+1 桁目に桁上げが発生すること

「ビット(bit)」 2進数1桁のこと (binary digit) ..... [情報理論的には 『情報量』をあらわす基本単位]

「バイト(Byte)」 8bitを一まとめにした単位

2進数（binary number） : 基数 r=2 で表現する数 $0 \le a_i < 2$
8進数（octal number） : 基数 r=8 で表現する数 $0 \le a_i < 8$
16進数（hexadecimal number）: 基数 r=16 で表現する数 $0 \le a_i < 16$ （10以上の数はA,B,C,D,E,Fの１文字で表現）

1. 数の表現

r 進数

「桁」は figure あるいは digit と
表現することがある

r進数（基数 r）でn桁の計算に関する用語

「最上位桁 と 最下位桁 」（一般系）
Most Significant Digit(MSD) Least Significant Digit(LSD)

特に２進数表現 (r=2)の場合
「最上位ビット と 最下位ビット」
Most Significant Bit (MSB) Least Significant Bit(LSB)

（P.37中段） あくまでも、使用中の教科書での 統一表記ルール として
最下位桁の 後に b, o, d(あるいは省略), h をつけて、
それぞれ2進数、8進数、10進数、16進数を区別
（といいつつも、 文脈から明らかな場合は b,o,d,h を省略すると書かれている点に注意！！）

プログラミング言語 C や C++では
整数に関しては、
１6進数は 0x
２進数は 0b
を最上位桁の前に付けて10進数と区別。
(滅多に使わないがMSDに0 を付けると
なんと8進数と解釈されるので要注意！)

表記例

2進数（binary number）	:	0101**b**	111.01**b**	0.0001**b**
8進数（octal number）	:	17654321**o**	1234.5671**o**	0.0007**o**
16進数（hexadecimal number）	:	89ABCDEF**h**	1234.FEDC**h**	0.CBA98**h**

2. 基数の変換

整数部

「桁」は figure あるいは digit と
表現することがある

r進数（基数 r）で 整数部I_0 (n桁) 小数部D_0 (m桁)の数が表す（10進数で換算した時の）値Nは

$$N = (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0 \,.\, a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m})_{(r)} = (I_0 \,.\, D_0)_{(r)}$$

$$= a_{n-1}\bullet r^{n-1} + a_{n-2} * r^{n-2} + \cdots + a_2 \bullet r^2 + a_1 \bullet r^1 + a_0 \bullet r^0 + a_{-1} \bullet r^{-1} + \cdots + a_{-m} \bullet r^{-m}$$

n=4で考えると

I_0 は $I_0 = a_3r^3 + a_2r^2 + a_1r + a_0 = (a_3r^2 + a_2r^1 + a_1)r + a_0$
であるので、 I_0 を rで割った余りは a_0 となり 商をI_1 とすると

I_1 は $I_1 = a_3r^2 + a_2r + a_1 = (a_3r^1 + a_2)\,r + a_1$
であるので、 I_1 を rで割った余りは a_1 となり 商をI_2 とすると

I_2 は $I_2 = a_3r^1 + a_2 = (a_3)r + a_2$
であるので、 I_2 を rで割った余りは a_2 となり 商をI_3 とすると

I_3 は $I_3 = a_3$
であるので、 I_3 を rで割った余りは a_3 となり 商は0となる

2. 基数の変換

小数部

「桁」は figure あるいは digit と
表現することがある

r進数（基数 r）で 整数部I_0 (n桁) 小数部D_0 (m桁)の数が表す（10進数で換算した時の）値Nは

$$N = (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0 \,.\, a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m})_{(r)} = (I_0 \,.\, D_0)_{(r)}$$

$$= a_{n-1}\bullet r^{n-1} + a_{n-2} * r^{n-2} + \cdots + a_2 \bullet r^2 + a_1 \bullet r^1 + a_0 \bullet r^0 + a_{-1} \bullet r^{-1} + \cdots + a_{-m} \bullet r^{-m}$$

m=3で考えると

D_0 は $D_0 = a_{-1}r^{-1} + a_{-2}r^{-2} + a_{-3}r^{-3} = (a_{-1} + a_{-2}r^{-1} + a_{-3}r^{-2})r^{-1}$
であるので、 D_0 を r 倍すると整数部は a_{-1} となり 小数部をD_1 とすると

D_1 は $D_1 = a_{-2}r^{-1} + a_{-3}r^{-2} = (a_{-2} + a_{-3}r^{-1})r^{-1}$
であるので、 D_1 を r 倍すると整数部は a_{-2} となり 小数部をD_2 とすると

D_2 は $D_2 = a_{-3}r^{-1}$
であるので、 D_2 を r倍すると整数部は a_{-3} となり 小数部は0となる

2. 基数の変換

2進数と10進数の相互変換

「桁」は　figure　あるいは　digit と表現することがある

r進数（基数　r）で　整数部I_0　(n桁)　小数部D_0　(m桁)の数が表す（10進数で換算した時の）値Nは

$$N = (a_{n-1}a_{n-2}\cdot\cdot\cdot a_2a_1a_0\ \bullet\ a_{-1}a_{-2}\cdot\cdot\cdot a_{-m})_{(r)} = (I_0\ \ .\ \ D_0)_{(r)}$$

$$= a_{n-1}\bullet r^{n-1} + a_{n-2} * r^{n-2} + \cdot\cdot\cdot + a_2 \bullet r^2 + a_1 \bullet r^1 + a_0 \bullet r^0 + a_{-1} \bullet r^{-1} + \cdot\cdot\cdot + a_{-m} \bullet r^{-m}$$

n=4,m=3の例

rが10なら　$N = 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 + \frac{1}{10}a_{-1} + \frac{1}{100}a_{-2} + \frac{1}{1000}a_{-3}$

rが2なら　$N = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 + \frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{4}a_{-2} + \frac{1}{8}a_{-3}$

(1010.001) (r) が表す数値Nは？　　数値Nを r進数で表すと?

10進数の　0.8　0.4　0.1 は….

いろいろな求め方を使えると、あとあと便利！！

2. 基数の変換

2進数と10進数の相互変換

便利な表？

2	0. 5
4	0. 25
8	0. 125
16	0. 0625
32	0. 03175

2進数⇒10進数

1) 原理に忠実に　ひたすら以下の式を計算

$$N = 2^{n-1}a_{n-1} + \cdots + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 + \frac{1}{2}a_{-1} + \frac{1}{4}a_{-2} + \frac{1}{8}a_{-3} + \cdots + 2^{-m}a_{-m}$$

例題2’　2進数　110.101b を10進数に変換せよ。
（例題2は　1101.01b　なんか似ていないか？）

2）割り算の利用　（小数部がm桁の場合）

$N' = (a_{n-1}a_{n-2}\cdot\cdot\cdot a_2a_1a_0\ a_{-1}a_{-2}\cdot\cdot\cdot a_{-m})_{(r)}$　という整数と考えて　N’を10進数で表した後に　2^mで割る。

いろいろな求め方を使えると、あとあと便利！！

2. 基数の変換

2進数と10進数の相互変換

便利な表？

0. 5	2
0. 25	4
0. 125	8
0. 0625	16
0. 03125	32
	64
	128
	256
	512
	1024

10進数⇒2進数

1）基本形　（整数部　と　小数部を別々に計算）

例えば　26. 875d　を　2進数に変換

整数部

26/2 = 13 … 0
13/2 = 6 … 1
6/2 = 3 … 0
3/2 = 1 … 1
1/2 = 0 … 1　（最上位桁）

小数部

0.625 *2 = 1.25
0.25 *2 = 0.50
0.50 * 2 = 1.00　（最下位桁）

検算！

11010b = 16+8+2 = 26 (正解！)　　0.101b = 0.5 + 0.125 = 0.625 (正解！)

2）引き算の利用（整数部　と　小数部を別々に計算）

27 ー 16 = 11　(16d=10000b)
11 ー 8 = 3　(8d= 1000b)
3 ー 2 = 1　(2d= 10b)
1 ー 1 = 0　(1d= 1b)

0.875 −0.5 = 0.375　(0.5d = 0.1b)
0.375 ー0.25 = 0.125　(0.25d = 0.01b)
0.125 ー0.125 = 0　(0.125d = 0.001b)

2. 基数の変換

2進数と10進数の相互変換

2進数表現での少数表現の限界　…　有限桁の2進数で表現できない数値が存在！

0.725 *2 = 1.45
0.45 *2 = 0.9
0.9 *2 = 1.8
0.8 *2 = 1.6
0.6 *2 = 1.2
0.2 *2 = 0.4
0.4 *2 = 0.8

0.8 *2 = 1.6
0.6 *2 = 1.2
0.2 *2 = 0.4
0.4 *2 = 0.8

$0.725d = 0.101\dot{1}10\dot{0}$

循環小数表現となり、有限桁で表すことが不可能

有限ビットで表現すると、真の値　との差が　「打ち切り誤差」となる

少数点以下　m ビットで打ち切った場合の　打ち切り誤差 の絶対値は　2^{-m}　未満

（例えば少数点以下2ビットで打ち切ると、表現可能な小数部は
0.00　0.25　0.50　0.75　の4種類で　誤差の絶対値は　0.25　未満）

2. 基数の変換

2進数と16進数の相互変換

2進数 nビット で $0 \sim 2^{n-1}$までの 2^n通りの数値を表現可能

2進数3桁 は 8進数1桁 に相当する表現が可能

2進数4桁 は 16進数1桁 に相当する表現が可能

10進	2進	8進	16進
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7

10進	2進	8進	16進
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

3. 負数の表現と加減算

符号付の2進数表現

n bitで表現された2進数の最上位ビット(Most Significant Bit:MSB)
を符号ビットとし、MSBをSとすると S=0のとき正、S=1のとき負の数をあらわす。

下位 n-1ビットの表現法として、例えば以下の3つが考えられる

符号＋絶対値
下位 n-1ビットで、数値の絶対値を表現する

2の補数
符号を含めた n bitで2の補数表現とする

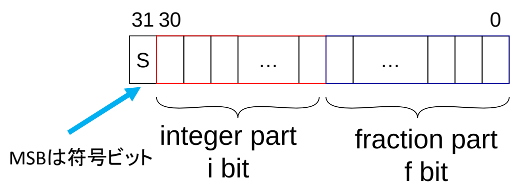
1の補数
符号を含めた n bitで1の補数表現とする

実数の表現（2進数で符号＋絶対値表記の例）

- 固定小数点表現
  - 整数部(integer part) i桁と小数部(fraction part)j桁
  で実数を表現

10110.1 (i=5,f=1)　-1011.01 (i=4,f=2)　1.01101 (i=1,f=5)

32bit固定小数点表現の例



特に
i=31,f=0 の場合は 整数
逆に
i=0, f=31の場合は 純小数

教科書P.40 は 4bit でかつ
整数 or 純小数のみに言及

実数の表現（10進数）

- 固定小数点表現（小数点の位置は絶対位置）
  - 日常的に接している実数表現
  - 整数部 (integer part) i桁と小数部(fraction part) f桁で表現

12345.6 (i=5,f=1)　-9234.56 (i=4,f=2)　5.23456 (i=1,f=5)

- 浮動小数点表現 （小数点の位置は相対位置）

$1.23456 \times 10^4 = 12.3456 \times 10^3 = 123.456 \times 10^2$ $(=123456.0 \times 10^{-1})$

  - 正規化表現 [$(-1)^S \times M \times B^E$形式] (科学記数法[有効桁数が重要])
  - 整数部１桁（0以外の数値）＋小数部k桁 （以下はk=5の例）

1.23456×10^4　-9.23456×10^3　5.23456×10^{-0}

この例では有効桁数は10進6桁