計算機システムの基礎(第6回配布)

第3章　論理回路

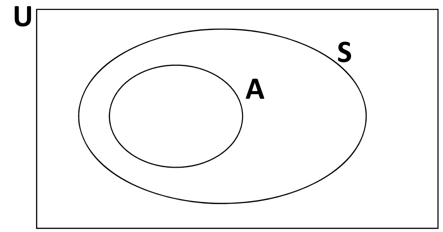
（1）集合
　　集合、補集合、集合の要素、集合の基本演算
（2）2値論理　と　基本論理回路
　　ブール代数、公理、定理、基本論理回路
（3）組み合わせ回路
（4）順序回路

担当：福井大学　大学院工学研究科
情報･メディア工学専攻
森　眞一郎　(moris@u-fukui.ac.jp)

1．集合

1．1　集合と要素

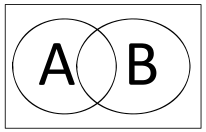
･ある共通の性質をもった『**要素**』(element)（あるいは 「元」）の集まりを**集合(set)**とよぶ。
･ x が集合　A　の要素であるとき　$\boldsymbol{x \in A}$　と表す。
･集合A　の要素と　集合B　の要素が　完全に一致する場合　「**集合AとBは等しい**」。
･集合AとSは等しくないが、集合A　の全ての要素が　集合S　の要素と一致する場合
「**集合AはSの部分集合(subset)**」。
･考えている要素全てを含む集合Uは「**全体集合(universal set)**」



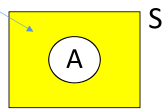
例えば
U：自然数
S：2以上の偶数
A：4以上の4の倍数
B：4以上で4で割り切れる自然数

1．集合

1．2　集合の基本演算



･積集合（product set）（　“共通部分”、“交わり”）
　　$A \cap B = \{x | \ x \in A$　かつ　$x \in B\}$　　　∩　：“Cap”
･和集合（sum set）　<<<<　教科書の間違いを訂正してください！！
　　$A \cup B = \{x | \ x \in A$　または　$x \in B\}$　　　∪　：“Cup”
･補集合(complementary set)
　　全体集合Sの部分集合Aが与えられたとき、「**AのSに対する補集合**」は
　　SからAの全ての要素をとりのぞいた集合であり　$\overline{A}$　と表現する。
　　（　$\overline{A} = S - A$ と書くこともある）
･空集合　φ　(empty set)
　　要素数がゼロの集合
　　$A \cap \overline{A} = \phi$，$A \cup \overline{A} = S$



ド･モルガンの法則　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$　，　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2値論理と基本論理回路

- 2値論理(binary logic),ブール代数(Boolean algebra)
  - 真(true),偽(false)　あるいは1,0 の2状態で物事を考える論理体系
- 論理関数(logical function)
  - 変数：2値の論理変数(logical variable)または ブール変数（Boolean variable)
  - 演算子：論理演算子
    - 基本演算：論理積、論理和、否定
  - Ex.　f(A,B) = A + B　あるいは簡略形で f = A + B　など

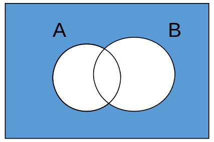
ブール関数 (Boolean function),　論理式(logical equation),　ブール代数(Boolean equation)などとも呼ぶ

論理関数の表現方法

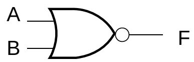
- 論理式
  F＝A＋B･C＋D･E
- 真理値表
- 図(ベン図、カルノー図等)を用いた表現
- 回路図表現（MIL記号、論理素子記号）

真理値表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



ベン図



MIL記号

重要な公理、定理

すべての変数は
1または0の何れかの値をとる

$x+1=1$	$x+0=x$
$x\cdot 1=x$	$x\cdot 0=0$
$\bar{0}=1$	$\bar{1}=0$

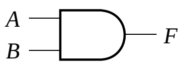
- 対合律(2重否定）
  $\bar{\bar{x}} = x$
- 補元律
  $x \cdot \bar{x} = 0$
  $x + \bar{x} = 1$
- べき等律
  $x \cdot x = x$
  $x + x = x$
- 交換律
  $x \cdot y = y \cdot x$
  $x + y = y + x$
- 結合律
  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 分配律
  $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$
  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- 吸収律
  $x \cdot (x + y) = x$
  $x + x \cdot y = x$
- ド･モルガンの定理
  $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
  $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

基本論理演算

- 論理積(AND)
  F =A･B
  =A∧B
  =A∩B

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

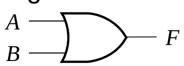
logical product



- 論理和(OR)
  F =A＋B
  =A∨B
  =A∪B

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

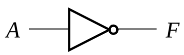
logical sum



- 否定(NOT)
  F =$\overline{A}$
  =～A
  =A’
  =￢A
  = ! A

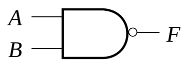
A	F
0	1
1	0

complement



論理素子とそのシンボル

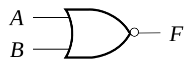
Not AND
(NAND)



$F = \overline{A \bullet B}$

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

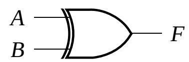
Not OR
(NOR)



$F = \overline{A + B}$

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

排他的論理和
(XOR)



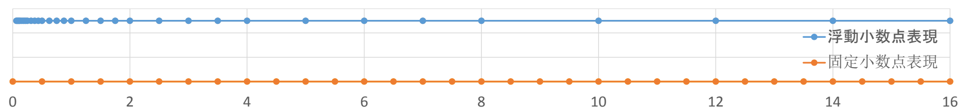
F =A⊕B

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

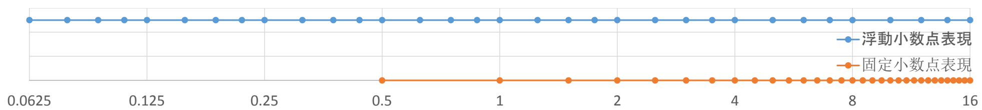
『補足資料』　同一ビット数の　浮動小数点表現と固定小数点表現で
表現できる数値の関係（一例）　[2進数表現Version]

（教科書　P.053の図2は「雰囲気」はわかりますが厳密には不正確です）

蜜　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　疎



均一



（固定小数点表現では　０　も表現できるが、横軸対数メモリのグラフでは表現できないので省略してあります）

これらは5bit の例ですが、厳密には右端の16（33個目)は表現できませんが見やすくするために追加しています